

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1- نضع من أجل كل عدد مركب  $z$ :  $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$ .

(أ) تحقق أن  $P(2\sqrt{3}) = 0$ .

(ب) جد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث من أجل كل عدد مركب  $z$ :  $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$ .

(ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة  $P(z) = 0$ .

2- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  $A$ ،  $B$  و  $C$  نقط من المستوي لواحقها على

الترتيب:  $z_A = -\sqrt{3} + 3i$ ،  $z_B = -\sqrt{3} - 3i$  و  $z_C = 2\sqrt{3}$ .

(أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .

(ب) بين أنه يوجد دوران  $r$  مركزه  $A$  و يحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$ ، يطلب تعيين زاويته.

(ج) استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

(د) عين  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي  $ABDC$ .

3- عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة  $z$  بحيث:  $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

(العدد  $\bar{z}$  هو مرافق العدد  $z$ ).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ،  $(\Delta)$  المستقيم الذي يشمل النقطة  $A(1; 0; 2)$

وشعاع توجيه له  $\vec{u}(2; 1; -1)$  وليكن  $(\Delta')$  المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط التالي:  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda; (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ .

1- (أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$ .

(ب) بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا من نفس المستوي.

2- (أ) بين أن النقطة  $B(-1; 3; 1)$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(\Delta')$ .

(ب) تحقق أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على كل من المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$ .

(ج) استنتج المسافة بين المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$ .

3- لتكن  $N$  نقطة إحداثياتها  $(-2+t; 2+t; t)$  حيث  $t \in \mathbb{R}$  ولتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $h(t) = AN^2$ .

(أ) بين أن النقطة  $N$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta')$ ، ثم اكتب عبارة  $h(t)$  بدلالة  $t$ .

(ب) استنتج قيمة العدد الحقيقي  $t$  التي تكون من أجلها المسافة  $AN$  أصغر ما يمكن. ثم قارن بين القيمة

الصغرى للدالة  $h$  والمسافة  $AB$ .

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $I = [0; 4]$  كما يلي :  $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

- 1- أ) بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $I$ .
- ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$  ،  $f(x)$  ينتمي إلى  $I$ .
- 2- لتكن المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدّها الأول  $u_0 = 4$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .
  - أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq u_n \leq 4$ .
  - ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة.
  - 3- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \neq 0$ .

4- لتكن  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

- أ) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول  $v_0$ .
  - ب) اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .
  - ج) استنتج أن :  $u_n = \frac{52}{36n+13}$  وذلك من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I- لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$  (حيث العدد  $e$  هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

- 1- ادرس تغيّرات الدالة  $g$  ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
- 2- بين أن للمعادلة  $g(x) = 0$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-0,34 < \alpha < -0,33$ .
- 3- استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ .

II- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

- أ)  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- 1- أ) بين أن  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  واحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$  . ( $f'$  هي مشتقة الدالة  $f$ ).

- ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
- د) ارسم المنحنى  $(C_f)$  . (نقبل أن :  $f(\alpha) \approx 3.16$ )

2- أ) بين أن الدالة :  $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

- ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى  $(C_f)$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي :  $x=0$  و  $x=1$ .

3- نعتبر الدالة العددية  $k$  المعرفة على  $]-1; 1[$  بـ :  $k(x) = f(-|x|)$  و  $(C_k)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

- أ) بين أن الدالة  $k$  زوجية.
- ب) بين كيف يمكن استنتاج المنحنى  $(C_k)$  انطلاقا من المنحنى  $(C_f)$  ثم ارسمه (دون دراسة تغيّرات الدالة  $k$ ).
- ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $k(x) = m$ .

انتهى الموضوع الأول

### الموضوع الثاني

#### التمرين الأول: (05 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ونعتبر النقط  $A(2;1;-3)$ ،  $B(0;-1;2)$  و  $C(-3;-1;-1)$
- 1- أ) بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا.
  - ب) بين أن المعادلة:  $2x - 7y - 2z - 3 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .
  - 2- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  الذي يشمل النقطة  $A$  ويعامد المستقيم  $(BC)$ .
  - 3- أ) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(D)$  تقاطع المستويين  $(ABC)$  و  $(P)$ .
  - ب) بين أن المستقيم  $(D)$  عمود في المثلث  $ABC$ .
  - 4- ليكن  $(\Delta)$  المتوسط المتعلق بالضلع  $[AC]$  في المثلث  $ABC$ .

$$\text{أ) بين أن الجملة : } k \in \mathbb{R} \text{ ; } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases} \text{ تمثل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

- ب) بين أن المستقيمين  $(D)$  و  $(\Delta)$  يتقاطعان في نقطة  $G$  يطلب تعيين إحداثياتها.
- ج) بين أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين.
- د) ماذا تمثل النقطة  $G$  بالنسبة للمثلث  $ABC$  ؟

- 5- عيّن طبيعة وعناصر المجموعة  $(E)$  للنقط  $M$  من الفضاء التي تحقق  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3$ .
- التمرين الثاني: (4.50 نقاط)**

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0 \dots (E)$ .  
يشير الرمز  $\bar{z}$  إلى مرافق العدد المركب  $z$ .

- 1- أ) أثبت أن المعادلة  $(E)$  تكافئ المعادلة  $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$ .
- ب) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$ .
- 2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(o; \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  التي لواحقتها على الترتيب :  $z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ،  $z_B = \bar{z}_A$ ،  $z_C = -1$ ،  $z_D = -\frac{5}{2}$ .
- أ) اكتب كلا من العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.
- ب) أنشئ النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ .
- ج) أثبت أن :  $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$ .
- د) استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .
- 3- ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  و نسبته 2 ولتكن  $F$  صورة  $A$  بالتحويل  $S$ .  
أنشئ النقطة  $F$  ثم حدّد طبيعة المثلث  $AFC$ .
- 4- عيّن طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث  $z + 1 = kz_B$ . لما يتغير  $k$  في المجموعة  $\mathbb{R}_+$ .



**التمرين الثالث: (4,50 نقاط)**

- ( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  مجموعة الأعداد الطبيعية بعدها الأول  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$
- ب:  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$  ولتكن المتتالية ( $v_n$ ) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ب:  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .
- 1- بيّن أنّ المتتالية ( $v_n$ ) هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدّها الأول  $v_0$ .
- 2- (أ) عبّر بدلالة  $n$  عن عبارة الحد العام  $v_n$ .
- (ب) استنتج عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .
- (ج) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- 3- (أ) احسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .
- (ب) تحقق أن:  $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$  وذلك من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

(ج) استنتج بدلالة  $n$  المجموع:  $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$

**التمرين الرابع: (06 نقاط)**

- I- لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $g(x) = 2e^x - x^2 - x$ .
- 1- (أ) احسب  $g'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة  $g'$  (حيث  $g'$  هي مشتقة الدالة  $g$ )
- (ب) بيّن أنه، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) > 0$ .
- (ج) احسب نهايتي الدالة  $g$  عند كل من  $-\infty$  و  $+\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 2- بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $-1,38 < \alpha < -1,37$ .
- 3- استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .
- II- لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$ .
- وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- 1- (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- (ب) بيّن أنه، من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$  (حيث  $f'$  هي مشتقة الدالة  $f$ ).
- (ج) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- 2- (أ) بيّن أنّ  $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .
- (ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
- (ج) أنشئ المنحنى  $(C_f)$ . (تُعطي  $f(\alpha) \approx 0.29$ )